量子カオスと複素半古典論

首藤 啓
東京都立大学 大学院理学研究科

池田 研介
立命館大学 理工学部

1. 量子カオスにおける半古典論

量子系が離散的なスペクトルをもつ限り、時間発展には準周期的なものしか現れない。このことから線形なシュレディンガー方程式の解である量子力学にはカオスはないことになる。しかし、対応する古典論がカオスを示すか否かは、対応する量子論に明確に反映する。エネルギーレベルの統計的性質が、隣接するレベル間にまったく相関のないポアソン過程に従うか、それともレベル反発のあるランダム行列の普遍則に従うかは、対応する古典論が可積分かカオスかに応じて決まる。固有関数のパターンにも系の可積分性のはっきりとした反映がある [1]。

こういった量子論の特徴を直接古典論の可積分性・非可積分性から理解するには、量子論が古典論を用いて書けていなければならない。実際、ポアッソンの和公式やセルバーグの跡公式などは、それぞれ、調和振動子、定負曲率面上の測地流の問題に対してそのことを実現している。無限和による発散の困難をもつ後者の跡公式と、周期軌道とスペクトルの一対一の関係を与える前者とでは、その構造は大きく異なるが、波動と粒子の双対性を **exact** に表現している点ではどちらも同じである。定負曲率面上の測地流の問題は、古典カオスのプロトタイプと考えることができるため、セルバーグの跡公式はカオス系の量子論を古典論から探求するための格好の材料となっている [2]。(定負曲率面上の測地流の問題は曲率をもつ空間の上での自由運動であることから、いわば"解ける非可積分系"である。そしてその反映として、セルバーグの跡公式は **WKB exact** な関係式となる [3]。ポアッソンの和公式は調和振動子であるから言うまでもない。)

しかしながら、一般の量子論と古典論の関係を議論する際に登場する半古典論、つまり WKB 法はせいぜい両者の間の漸近的な関係しか与えない。最も単純な1次元の振動子であっても、ポテンシャルが少しでも非調和項をもてばエネルギースペクトルを与える表式は、プランク定数に関する漸近展開の形でしか与えることはできないことは誰でも知っている。漸近展開は発散する級数であるから、半古典論をもとになるべく精密な量子古典の対応を追求しようとするとどこかでその矛先は鈍らざるを得ない。量子古典の対応関係を述べるときにはいつも「半古典近似の範囲内で」という但し書きが必要になるからである。もちろん、最低次の項(古典論)を用いて得られた情報が貴重であることは言うまでもないが、誤差の評価が難しいためその足場が定まらないのも事実である。

例えば、グッツウィラーの跡公式は、理想カオス系のエネルギー固有値と周期軌道の漸近的な関係(セルバーグの跡公式に相当するもの)を与える表式として既に広く知られるようになったが [4]、半古典近似を用いたことによる誤差が各エネルギーレベルの平均間隔に比べて十分小さい保証は今のところどこにもない [5] [6]。もし、半古典近似からくる誤差が平均のレベル間隔を上回ることにもなろうものならグッツウィラーの跡公式は個別のレベルに対して何の情報も与えないことになる。最近接レベル統計などの普遍則を半

古典跡公式を通して説明する試みはその時点で根拠を失ってしまう。

それ以前に、カオス系であることによって生ずる跡公式の発散の困難（セルバーグの跡公式でも同じ）に対して仮に何らかの対処法（Riemann-Siegel lookalike, cycle expansion, Fredholm series など [7][9]）を講じることに成功したとしても、プランク定数に対する展開の最低次の項のみしか考慮していないことが新たな発散を招いてしまうことも忘れることはできない [8][9]。

2. 鞍点法とストークス現象

最初に、通常の半古典論で用いられる鞍点近似と漸近展開についてまわるいくつかの曖昧な点を考えてみたい。

簡単な場合として、1次元のポテンシャル障壁前後での WKB 解の接続問題を考える。ポテンシャルから十分離れた漸近領域で求められた WKB 解は、展開点近傍で線形近似されたポテンシャル問題の解を介して接続される。ポテンシャル近傍のシュレディンガー方程式は以下の Airy の微分方程式：

$$-\hbar^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + zu = 0 \tag{1}$$

を解くことに帰着される。その解は Airy 型の積分表示を用いて：

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\Big[i(z\xi - \frac{\xi^3}{3})\Big] \tag{2}$$

と表されるが、ポテンシャルから十分離れたところでの漸近形を求めるためには、$|z| \gg 1$ として Airy 型積分 $u(z)$ に鞍点法を適用すればよい。位相関数を $f(\xi) \equiv z\xi - \xi^3/3$ とおくと、鞍点条件は $f'(\xi) = 0$ である。鞍点法の考え方は、最初に与えられた積分経路を、複素面上の鞍点を通る経路に変形することにより、鞍点の近傍の局所的な積分によって求めたい積分を近似する、というものである。しかし、位相関数が2次多項式でない限り当然のことながら複素平面上には複数の鞍点が存在し、そのような場合、変形された積分経路はいったいどの鞍点を通過し、どの鞍点は通らないか？という問題が直ちに発生する。以下で見ていくようにその選別は自明な問題ではない。

シュレディンガー方程式は2階の微分方程式であるから、線形独立な2つの解に対応して2つの鞍点解、すなわち漸近解が得られる。しかし、いま考えている1次元ポテンシャル問題では、いつでもこれら2つの漸近解が現れては困る。というのは、$z \to +\infty$ で漸近解は指数関数的に増大する解と減少する解の2つから成るが、指数関数的に増大するほうの解は物理的に意味がなく、$z \to +\infty$ での境界条件から捨て去らなければならないからである。一方、$z \to -\infty$ での2つの漸近解は双方とも振動する解であり、どちらとも許容される解となる。その結果、$z \to \pm\infty$ の両側の領域を比べると、寄与する鞍点の個数が異なることになる。このような漸近解の一見奇妙な振る舞いが、Airy 積分 (2) の漸近解を求める手続きのなかどのように反映されるのだろうか。

鞍点法は $|z| \to \infty$ のもとで成立するつ近似であるから、実軸上で $z \sim 0$ の様子を知ることはできない。そこで、zを複素領域に解析接続し $|z|$ の絶対値の大きい経路に沿って漸近解を追跡することによって $z = \pm\infty$ の間で何が起こっているかを考えてみる。実軸上 $z \to \pm\infty$ で漸近解の個数が異なるということは、少なくとも複素面上をまわる経路の

途上、漸近解の個数が不連続に変化している場所がなければならないことを意味する。しかし、もし2つの漸近解が同程度の大きさをもっているときにどちらかの漸近解が突然消滅すれば、漸近解の値自体がその前後で不連続にジャンプすることになり漸近解としての意味をなさなくなってしまう。従って、漸近解が複素領域でなるべく滑らかにつながっているようになるためには、残る側の漸近解が消える方の漸近解に比べて十分大きくなっているときでなければ困る。Airy 積分 (2) の場合、$z > 0$ の側にある2つの解から漸近領域 $|z| \gg 1$ に沿って時計回りに解を接続していくと、$argz = 2\pi/3$ のときに一方の漸近解は$\sim z^{-1/4}\mathrm{e}^{-(2/3)z^{2/3}}$、他方は$\sim z^{-1/4}\mathrm{e}^{(2/3)z^{2/3}}$となり、前者 (=主解：dominant solution) は後者 (=劣解：sub-dominant solution) をその大きさにおいて最も凌駕する。従って、$\arg z = 2\pi/3$ の主解と劣解の大きさの比が最も大きくなった瞬間に劣解を全体の漸近解の寄与から外せばそのショックを最小限に食い止めることができる。漸近解の値をできるだけスムーズにつなげるために、この事実を一般化して、“漸近解の個数の不連続なジャンプは主解と劣解の大きさの差が最も大きくなった瞬間に起こるべし”、という、漸近解の生成・消滅に対する指導原理を『指数的最大優越の原理』という [11][12]。

複素面上で積分の漸近解を追跡していったとき、その漸近形が見かけ上不連続に変化する現象のことを**ストークス現象**と呼び、複素面上（いまの場合複素 z平面上）一方の解が他方の解を最も凌駕する曲線（いまの場合 $\arg z = 2\pi/3$) を**ストークス曲線**という [10]。

鞍点を通る最急降下線を見ると、$z < 0$ のときは2つの鞍点を通っていた積分路は、偏角 ($\arg z$) を動かしていきちょうどストークス線上に達したとき、2つの最急降下線は縮退を起こす。ストークス線を通過した後、積分の端点（いまの場合、$\xi = -\infty, +\infty$）を結ぶことのできる最急降下線は、ストークス線上で dominant な鞍点だけとなり、結果、他方の鞍点は漸近解の寄与から姿を消す。

3. ストークス現象はどこで起こるか？

鞍点法とそれに付随して現れるストークス現象は、古典的な漸近展開論において以上のように説明されることが多かったと思われる [10] [11]。しかしどうにも腑に落ちないのは『指数的最大優越の原理』の根拠である。『指数的最大優越の原理』は、(1) 両側 $z = \pm\infty$ では解の個数が異なる、にもかかわらず、(2) 漸近解の値自身は不連続に変わっては困る、という一見相矛盾する要請を、最も表に現れない形で折り合いをつけるためのいわば妥協の産物であって、漸近解の個数が不連続に変わる場所に対するの積極的な根拠を与えているわけではない。この辺りのモヤモヤは、一般の鞍点法、漸近展開に共通して現れる以下のような問題がその源である。

まず、もともと鞍点法は、鞍点近傍の局所的な積分によって実行されるものであるが、位相関数が2次の多項式でない限り、高次の展開項がうしろに続く。得られる展開は、一般には漸近展開であり級数は発散する。最適項（真の値と漸近展開が最も接近する項）で展開を止めたとき（Poincare の意味での漸近展開）でも必ず何らかの誤差項をもつ。

それに対して、『指数的最大優越の原理』は、ストークス現象が、一方の鞍点解が他方の鞍点解に比べて指数的に小さい場所で起こっていることを主張する。しかし、もしそのとき、主解 (dominant solution) の漸近展開の誤差項の中に劣解 (sub-dominant) が埋もれてしまうくらい小さかったとするとすると、そもそも主解と劣解の最低次の項を比べること自体がナンセンスだということになる。漸近解の不連続なジャンプがちょうどストークス線上で起こる、という言い方はそのとき既に意味がなくなっている [13]。

従来の漸近展開理論では、少なくとも、誤差項に比べて劣解が十分大きくなった、す

なわち、ストークス線から十分離れた領域（例えば、いわゆるアンチストークス線上）では漸近解の意味付けが確定しているはずであるから、ストークス線直上やその近傍はともかく、確定している領域間の漸近解の接続さえ考えれば良い、という立場を取る。しかし、誤差項の評価ができるのは漸近領域 ($|z| \to \infty$) だけで、有限の領域に関しては何も言えないので曖昧な点は依然として解消しない。実際、あとで見るように有限の領域でストークス現象をどのように考えるべきか、という問題は高次元のストークス現象を考える上では不可避になる。

鞍点周りの展開を発散させる元凶は、展開の中心になっている鞍点以外にも別の鞍点が存在することであり、本来、異なる鞍点どうしは独立ではあり得ない。結局、もともと局所的ではないはずの各鞍点を、無理矢理、局所的なものと見なしてラベル付けをしようとしたが、その馬脚が複素領域、特にストークス現象の中に象徴的に現れるのである。ストークス現象が起こるのはまさにそのラベル付けが最も危うくなる領域ということになる。

4. カオス系での鞍点法の問題点

半古典論で用いられる近似も鞍点法である。鞍点法を近似と割り切り、

1. 各鞍点まわりの積分の局所性が保証されている漸近領域だけを見る、
2. ストークス線から十分離れた領域だけを考える（例えば、上記の接続問題の場合実軸上など）、

ということで話しを限定すれば、従来の取り扱いでもそれほど綻びは出ないかもしれない。しかし、半古典論を適用する系がカオス系であると状況が一変する可能性がある。一般にカオス系では

1. 積分の鞍点解の個数が指数関数的に増大し、鞍点の局所性が簡単に破れる。
2. トンネル現象のような純量子論的現象では、ストークス現象により鞍点解の選択とストークス線近傍の状況が決定的に重要になってくる。

量子論と古典論との対応関係を鞍点法（半古典論）を介して見る、ということは、量子論という、本来非局所的な波動現象を、古典軌道というラベル付けされた局所的な対象にあえて翻訳しようとしていることに相当する。従って、軌道の局所性の保証されている可積分系ではいざ知らず、カオス系ではいろいろ問題が発生する可能性が出て来よう。むしろ、カオス系の量子現象はその局所性が全く成り立たないことにその本質があるようにさえ思える。そういうわけで、鞍点法について回る不透明さはでき得る限り払拭しておきたい。

5. exact WKB 法

漸近展開が数学者の興味を遠ざけてきたのは、それが発散級数であり何ら解析的意味付けをもたないことによる。しかし、ここで見るように, 近年、複素係数をもつ微分方程式論において進んだ、漸近展開に対する新しいアプローチ（exact WKB 法、resurgent 理論）によって状況は変わってきた [14][16]。

exact WKB 法では、Borel 変換 (=逆 Laplace 変換) と Laplace 変換を組み合わせた＜Borel 総和法＞を通すことにより、これまで発散級数として曖昧なままにしか取り扱うことのできなかった漸近展開に解析的意味付けを与えることができる。先にも触れたように、

もともと漸近展開が発散することと、積分の鞍点が複数存在することとは表裏一体の関係にある。従って、発散する級数を総和法によって正確な意味付けを与えることは、各鞍点に疑義のないラベルを付けを行うことを意味する。さらには、以下で見るように、従来の漸近展開論では特定しきれなかったストークス現象もその枠内で捉えることができるようになる。実際、ストークス現象は、Borel 変換像を解析接続したとき、Borel 面上の特異点（古典的転回点・火点）から発するストークス線上で起こる基本解の組み替え、という明確な定義が与えられる。(1) で与えられるエアリの微分方程式の場合に則してアイデアのおおよその筋道を述べると以下のようなことになる。

最初に微分方程式から始める。(1) の微分方程式の WKB 解として

$$u(\eta)=\sum_{n=-1}^{\infty}c_n\eta^{-n} \tag{3}$$

を考える。ここで、$\eta=1/\hbar$ である。形式的な展開を (1) に代入し、$1/\eta$についての同次項の比較から係数 c_nに対する漸化式からが得られる（ここではその具体形は重要でないので省略)。一般に、得られた級数は漸近級数でしかない。そこで、この級数のボレル変換：

$$u_B(\zeta):=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\zeta^{-n}}{n!} \tag{4}$$

を考える。級数 (3) が発散する級数であっても、そのボレル変換は各係数を $n!$ で割っているためその収束性は大幅に改善される。ここで、もともとの級数がボレル総和可能な条件 [14] を満たすとき、ボレル変換 $u_B(\zeta)$ のラプラス変換：

$$\int_0^{\infty}d\zeta\exp(-\eta\zeta)u_B(\zeta) \tag{5}$$

を発散級数 $u(\eta)$ のボレル和という。ボレル総和可能であれば $u(\eta)$ のボレル和は変数 η に対して解析的な意味付けをもつため、従来の漸近展開論で曖昧なままに議論されていた問題を $u(\eta)$ のボレル和を用いてはっきりさせることができる。例えば、２つの漸近解の間で起こるストークス現象は、η を動かしていったとき、一方の漸近解を定めるボレル面上での積分路Γ_1を他方の漸近解に対応する特異点（ボレル面上の）が横切ったときに起こる積分路の組み替えとして捉えることができる。

エアリ関数の場合にこのことを具体的に見るには、解の積分表示 (2) を少し書き換えて、

$$u(\eta)=\int_{\Gamma_i}dx\exp\left[i\eta(x-\frac{x^3}{3})\right] \tag{6}$$

としておけばよい（もともとの変数 zとは $\eta=z^{3/2}$の関係にある。従って、$z\to\infty$ は $\eta\to\infty$ に対応しているが、偏角に関しては、z が 0 から 2πまで変わるときに、η は 0 から 3πまで動くことに注意)。また、積分路Γ_iは積分 (6) が収束するような３つの積分路（ただし、そのうち独立に取れるのは２つ）である。

いま位相関数を $f(x):=-i(x-\frac{x^3}{3})$ とおくと積分の鞍点条件 $f'(x)=0$ より鞍点 $x=\pm1$ が得られる。これを用いて積分の新しい変数、

$$s:=f(x)-f_1 \qquad (ここで、f_1=f(+1)) \tag{7}$$

を定義すると、$u(\eta)$ は、

$$u(\eta) = \exp(-kf_1)\int_{\Gamma_i} ds \exp(-\eta s)G(s) \tag{8}$$

ただし、

$$G(s) := \frac{1}{i\{1 - x^2(s)\}} \tag{9}$$

と表され、$u(\eta)$ は $G(s)$ のラプラス変換になっている。積分の鞍点 $x = \pm 1$ に対応するものとして、$G(s)$ は s 面（ボレル面）上で $s = 0$ および $s = F_{12} := (f_2 - f_1)$ に特異点をもつ。ここで、$G(s)$ をそれぞれの特異点のまわりで s に関して Puiseux 展開を行い、その各項にラプラス変換を施すと η に関する展開が得られるが、これは最初の漸近展開 (3) に他ならない。逆に、(1) の Airy の微分方程式の形式的級数解 (3) をボレル総和したもの（ボレル変換をラプラス積分したもの）がいまの場合の (8) である。つまり、(9) で与えた $G(s)$ がまさに漸近展開 (3) のボレル変換をあらわしていることになる。因みに、ボレル和の解析的情報はすべて $G(s)$ がもっている。

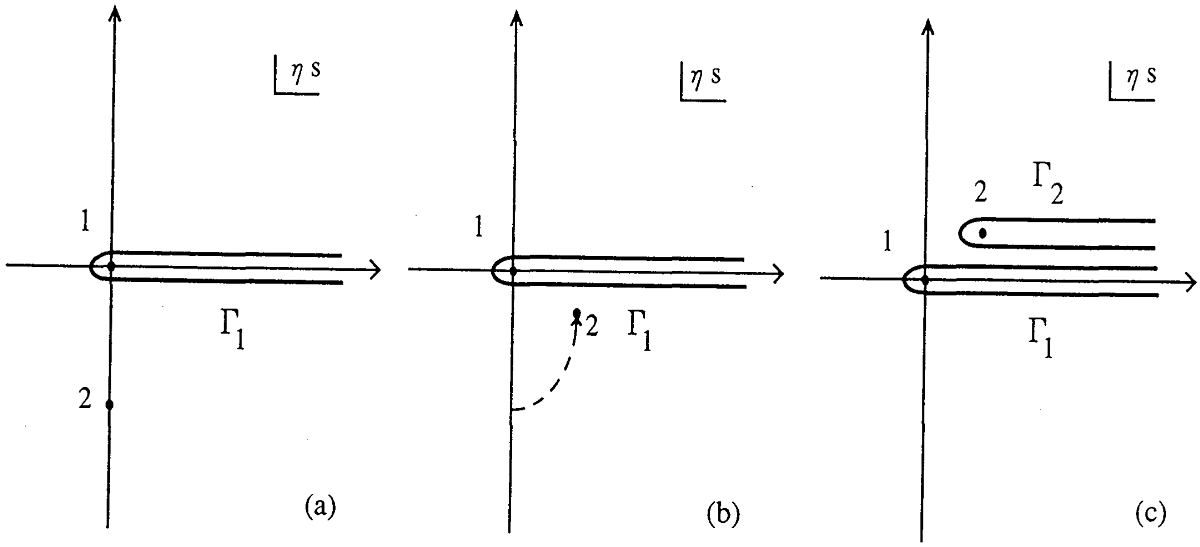

図 1 ボレル面上での特異点の動き.

η を動かしたとき、ηs 面上で 2 つの特異点は図 1 のように動く。ただし、ここでは最初の積分路として特異点 1 を通る積分路Γ_1（もともとの x に対する積分 (6) では、鞍点 $x = +1$ を通る最急降下線に対応する）をとった。η の偏角の動きと共にちょうど 2 つの特異点の虚部が等しくなるとき、特異点 1 の積分路Γ_1上に特異点 2 が横切る。そして、特異点 2 が積分路Γ_1を越えた後も引き続きラプラス変換 (8) を解析接続するためには積分路を図 1(c) のように変形すればよい。ところが、新たに発生した特異点 2 を回る積分路は、特異点 2 に対するボレル和に他ならないから、結局、特異点 2 が特異点 1 の積分路を通過する前後

で、もともとの積分は積分路Γ_2に対する積分を新たに獲得したことになる。これがボレル-ラプラス変換を介したexact WKB解析でみたときのストークス現象である。ここで見たエアリ関数に限らず一般に、ボレル面上で定義されたボレル変換像（厳密には超関数として定義されるもの[16]）を解析接続していく途上、その積分路上を別の特異点が通過すると、新たな積分路をもった積分が出現する。ちょうど積分路上にのった瞬間は、その定義より、一方の特異点に対応する鞍点が他方の特異点の鞍点に比べその差が最大になっている瞬間であるから、これはまさに従来の漸近展開論で『指数的最大優越の原理』が適用されるべきストークス線上に対応する。

しかし、エアリの微分方程式を見る限りでは、ストークス現象が起こる際の接続係数などは既に従来の漸近展開論でも求めることができ（もちろんそれはexact WKB法と一致するが）、exact WKB法など経なくとも、ストークス現象に関する大事な情報はすでに得られているのではないか？と感じる向きもあるかもしれない。確かにexact WKB法を通すことによって、今まで曖昧な解釈しか与えることのできなかったストークス現象を安心して議論できるようになったのは嬉しいが、それも単にボレル総和法を通したストークス現象の形式的定式化に過ぎないのではないか、という気もしないではない。

しかし、[14]でも詳しく述べられているように、漸近展開とそれに伴うストークス現象を疑義のない形で捉えられるようになったことは決して小さいことではない。特に、exact WKB法が明らかにした重要な点は、“異なるストークス線どうしが縮退する”、といった例外的な状況さえ除けば、ストークス線を越えるときの局所的な接続公式がつねにエアリ型の接続条件に帰着できる（Vorosの接続公式）ことをはっきりさせた点にあり、その結果、ストークス線を横切る際の解の局所的な接続は完全に代数的に処理することができることになる[15]。そのことが明らかになったお陰で今度は逆に、それ以外の大域的な情報はすべて**ボレル変換像のリーマン面の幾何学的な情報**が負っている、という重要な知見を我々は手にすることができる。そしてその大域的情報を表現するものは、考えている微分方程式、もしくは積分表示のストークス線がつくるグラフであり、結果、ストークスグラフの幾何学が決定的な役割を果たすことがわかってくるのである。

実際、一般の2階のフックス型微分方程式（特異点はたかだか確定特異点、ただしガウスの超幾何関数は既に解決済み）に対して、特異点まわりの局所的な特性指数の情報だけでは不十分だった大域解構成の情報（モノドロミー群）が、ストークス現象に出てくる接続行列の情報によって過不足なく補われることが明らかになった[15]。これなどはexact WKB法を著しい応用のひとつであり、この場合、簡単な場合のストークス線の性質はグラフ論的な考察よりその分類が完了している[14]。

6. 高次元のストークス現象

再び、カオス系の半古典論の問題に戻ろう。以上に述べたexact WKB解析のアイデアは、まだそれほど広いクラスの問題に対して確立しているわけではない。鞍点解として現れる古典軌道が時間と共に指数関数的に増大していくカオス系の半古典論は、まだその基礎付けが確定していない、＜高次元のexact WKB解析＞の問題である。

最初に、ここでカオス系の半古典論と呼んでいるものを明確にしておく。ここでは、時間が離散的な写像系のプロパゲータ、もしくはエネルギー領域のグリーン関数として以下

のような多重積分の問題を考える:

$$u(q_n, q_0) = \int \cdots \int_S dq_{n-1} \cdots dq_1 \exp\{-\frac{i}{h} S(q_n, \cdots, q_0)\} \tag{10}$$

念頭にあるのは量子力学の問題であり、今の場合 $S(q_n, \cdots, q_0)$ は古典作用汎関数であるが、漸近展開一般の話しとしては $S(q_n, \cdots, q_0)$ は何であっても構わず、一般の多重積分を想定してもらって構わない。

半古典論の実行は、作用汎関数に変分条件 $\delta S = 0$ を課すことによって得られる。これは多次元空間のなかの鞍点（すなわち古典経路）を決定する。得られる鞍点解は実古典軌道ばかりではなく、複素の古典軌道も当然出てくる。その結果、半古典論はトンネル効果のような純量子論的現象をも記述することが可能になる [17]。

以上のような多重積分の鞍点法において、ストークス現象をいかに処理するか？という問題は、高次元のストークス現象（ここでいう高次元とは、微分方程式でいえば 3 階以上の高階の微分方程式、従って、その解の積分表示を与える 1 重積分も高次元の問題に属する）の問題である。exact WKB 解析自体がまだ新しい分野であるためか、確実にわかっていることはまだそう多くはない。しかしながら、量子力学の半古典理論に限らず、多次元の鞍点法はそのものは物理でも極めて頻繁に使われる手法であり、その潜在的なニーズは決して少なくないはずである。こと量子論に対する半古典近似に話しを限ったとしても、冒頭に述べた重大な未解決領域に少しでもアプローチする取っ掛かりしてどうしても知っておきたいことでもある。さらには、カオスが存在する状況下でのトンネル現象においては、ストークス現象対策は、半古典論を通した現象の解釈になくてはならない重要なハードルでもある [17]。

ところで、**5.** で強調したように、ストークス線を横切る局所的な接続公式は、2 階の微分方程式に対しては確立された事実であるが [14]、ある 3 階の微分方程式に対しても同様に成り立つことが Aoki-Kawai-Takei によって証明されている [19]。この事実は、より一般の場合に対しても成り立つことが期待されるが、その証明は現時点ではまだない。このことが成り立っていなければ以後の議論はその足場をなくすが、当座のところは、いわゆる < Voros の局所的接続公式 > が高次元の場合でも成立しているものと仮定して話しを進めることにする。

高次元におけるストークス現象の著しい特徴は、ストークス線に交差が発生することである。このことは、Aoki らが取り上げたものと同じ 3 階の微分方程式に対して、Berk らによって最初に指摘された [20]。ストークス線が交差を起した場合、局所的な接続公式を何も考えずにそのまま適用してしまうと、交差点のまわりで接続する経路の周り方次第でその結果が異なったものになってしまうことは簡単な考察からわかる。Berk らは従来の WKB 解析を用いてストークス線が交差する近傍で従来の接続方法が破綻することを救うために、交差点から伸びる“新しいストークス線 (New Stokes line)”の導入し、その矛盾を解消できることを主張した。しかし、彼らの議論は発見的であり論文自体もいささかわかりにくいため、どこまでが一般的な議論に拡張することができ、どこからが取り上げている微分方程式に依存しているものなのか、いまひとつ判然としない。また、そもそも新しいストークス線がなぜ交差点上から伸びるのか？という根本的な疑問はまったく触れられていない。

しかしその後、同じ 3 階の微分方程式に対して、Aoki-Kawai-Takei が exact WKB 法の枠組の中でその問題を再度検討したところ、ストークス線の交差問題に関して、より基

本的な対象は、実は新しいストークス線ではなく、もともとの微分方程式の陪特性曲線の自己交差点として定義される“新しい転回点 (New turning point)”であることを明らかにした [19]。残念ながら、Aoki らの議論も＜新しい展開点の冗長性＞の処理といった未解決部分を残しており、その意味で、高次元のストークス現象は、単純な例題に限っても解析が完了しているわけではない。しかし、これらが大きな指針を与えることは確かである。

7. ボレル面のリーマン面と鞍点の隣接性

局所的な接続公式が成り立っているとき、大域的な情報はボレル像のリーマン面という幾何学的な情報に集約されている、ということを **5.** の最後で強調した。では、例として挙げたエアリ積分の場合、どこにそれが現れていたのだろうか？

図1において、η を動かしたとき、ボレル面上の特異点1の積分路上に特異点2がのったとき特異点2は新たな積分路を獲得したが、このようなことが起こるのは、特異点1と特異点2が同じリーマン面に乗っているからである。Airy の場合、特異点1と特異点2が同じリーマン面に乗っていることはほとんど自明であることから何の問題も起こらないが、一般の場合ではどうだろうか。

局所的に見れば、ある特異点が、その特異点と同じリーマン面にのっている別の特異点の積分路上を通過したときにストークス現象が起こる、というのが exact WKB 解析の考え方であるので、逆に、注目している特異点のペアがストークス現象を起こすか否か、ということはそのペアが同じリーマン面にあるか否か、を知ることと等価になってくる。＜ボレル像のリーマン面の情報＞と呼んだものは、η を動かしたとき、どの特異点どうしが同じリーマン面に乗っており、どれが異なるリーマン面にあるか？ということに関する情報のことである。エアリ積分ではその意味でのリーマン面の情報は自明のものとして暗黙に使われていたことになる。

鞍点法に戻って考えてみると、ある特異点2つが同じにリーマン面にあるということは、η（最初の (2) 式で言えば z）を複素面で動かしていったとき、位相関数 $f(x)$ 上で一方の鞍点を通る最急降下線が別の鞍点を通る最急降下線と縮退することに相当している。まさにストークス現象を起こすペアそのものである。

このことを逆手に取れば、位相関数に対してその複素変数の位相を一周させてやり、その途上、各鞍点を通る最急降下線が縮退するペアを見つけることにより逆にボレル面のリーマン面の情報を知るすることができることになる。Berry はこのような、ある複素変数値で最急降下線を共有するような鞍点のペアを“adjacent saddles（隣接する鞍点）”と呼んだが [21]、これは exact WKB 解析の中で、ボレル面で対応する特異点が同じリーマン面にのっている、と言っていることと等価である。

3階以上の微分方程式など、高次元の鞍点法には一般に鞍点が3つ以上出てくる。基本解の接続公式が上で述べたように2階の場合とおなじ Voros の接続公式に従うと仮定すると、高次元の場合もやはり大域的な情報を体現する＜ボレル像のリーマン面＞の構造を調べる、という作業がとりもなおさずその問題のストークス現象を解くことに相当するはずである。しかし、“言うは易いが行うは難し”である。Berk らが考察した3階の微分方程式では、その積分表示が1重積分として表されるので、位相関数の鞍点の adjacency（隣接性）をその最急降下線を具体的に計算することによって何とか調べることもできるが、(10) で与えたような一般の多重積分の場合、鞍点を通る積分面はもはや最急降下線ではなく多次元空間のなかの最急降下面となってしまい決して易しくはない [22]。

8. ストークス幾何のグラフ的決定法

ここでは多重積分 (10) に対するストークス現象を念頭に、**ストークスグラフ**を用いることによってボレル面のリーマン面を決定する可能性を考えてみる。さらに設定をはっきりさせるため、$S(q_{n-1},\cdots,q_0)$ の具体形として以下のものを考えることにする:

$$S(q_n,\cdots,q_0)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{2}(q_i-q_{i-1})^2+cq_i+\frac{1}{3}q_i^3\Big] \tag{11}$$

$S(q_n,\cdots,q_0)$ は、エノン写像と呼ばれるカオスを示す最も簡単かつ基本的な力学系の作用汎関数であり、その変分条件$\delta S=0$がエノン写像の時間発展方程式を与える。始状態 q_0を以下固定し、終状態 q_nを q_1の関数と考える。いまの場合、q_nをひとつ与えるごとに$\delta S=0$の条件から求まる鞍点（古典軌道、おのおのは q_1でラベルされる）は複素領域まで含めて一般に 2^n個存在する。いま、その各軌道を作用汎関数に入れた値を S_j $(j=1,2,\cdots,2^n)$ と書くことにする。

さてこのとき、$S_i=S_j$ (ただし,$i\neq j$) を満たす鞍点解のうち、$q_1^{(i)}=q_1^{(j)}$なるものは、微分方程式の場合に出てくる通常の意味での転回点（変わり点）に相当することから、以下、正規転回点（火点）と呼ぶことにする。一方、$S_i=S_j$でありながら、$q_1^{(i)}\neq q_1^{(j)}$ となっている場合を新しい転回点（火点）と呼ぶ。後者は高階の微分方程式に対して Aoki らが導入した New turning point に対応するものである。以上の準備のもとで、**ストークスグラフ**とは以下のものを指すことにする：

1. q_n面上のすべての正規の展開点 (火点) と新しい展開点 (火点).
2. 各正規転回点から伸びる 3 本のストークス線とその dominance, sub-dominance の関係.
3. 各新しい転回点から伸びる 2 本のストークス線とその dominance, sub-dominance の関係.

ここで言うストークス線とは、すべての S_j $(j=1,2,\cdots,2^n)$ のペアに対して $\mathrm{Im}\,S_i=\mathrm{Im}\,S_j$ を満足する複素 q_n 面上の曲線のことである。

位相関数が (11) で与えられる積分 (10) が、$n=1$、つまり 1 重積分の場合は **2.** から繰り返し例として登場したエアリ積分そのものであり問題は解決済みである。ところが、図 2 に示すように、$n=2$ の場合（基本解の個数は $2^2=4$)、高次の問題特有なストークス線の交差が早くも発生する。この場合のストークスグラフはなかなか複雑で、$\mathrm{Im}\,q_3=0$ 上では異なるペアどうしのストークス線が全く重なっており、このことと $\mathrm{Im}\,q_3=0$ 軸に対する対称性とから、$\mathrm{Im}\,q_3=0$ 上で、Berk ら、あるいは、Aoki らによって考察された 2 重の交差点のみならず、4 重交差点が発生する。高階の微分方程式同様、このようなストークスグラフに対しては、局所的な接続公式を適用するだけでは矛盾だらけの結果しか得られない。

ここで、正規転回点周りの接続公式、もしくは新しい転回点周りのストークス現象 [18][19]、さらには、ストークス線の交差が発生したときの接続のルール [20][19] などをもう一度思い出してみる。接続を行う中心に置かれているものはそれぞれ異なるが、どの場合にも共通して満たされていなければならないことは、それぞれ（正規・新転回点、交差点）のま

わりで周回したときの解の一価性である。Voros の接続条件から決まるストークス係数はエアリ積分の転回点のまわりで一周したときの解の一価性条件から決まるものであったし(これは従来の WKB 法でも全く同じ)、新転回点の周りでは“新転回点から伸びるストークス線上ではストークス現象を起こさない”(これは、Voros によって最初に指摘され [18]、Aoki らによって高階の場合の Ansatz として組み込まれた）という要請、さらには、交差点のまわりの経路の違いによる一価性条件の破綻を救うために導入された新しいストークス線、といったものもすべて一価性条件から要請される self-consistent condition と考えれば同じ内容のものである。

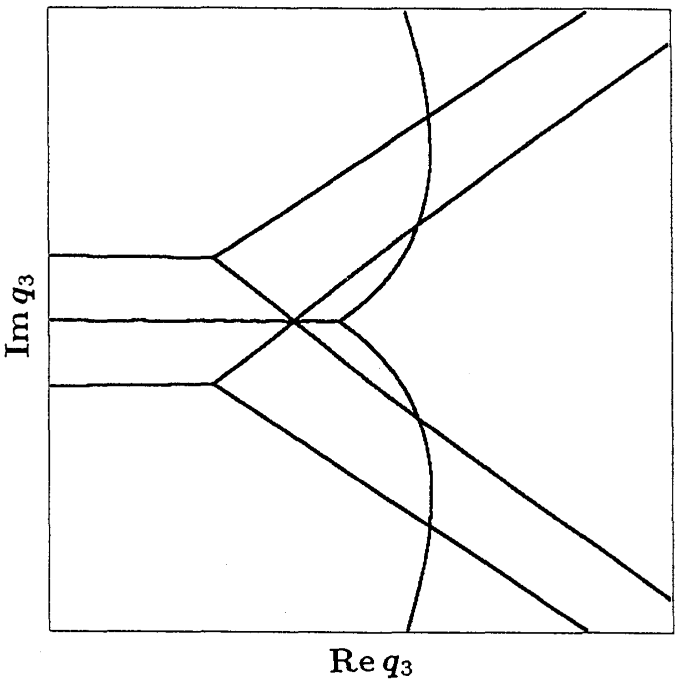

図 2 2-ステップエノン写像のストークスグラフ．4 個の 2 重交差点と 1 個の 4 重交差点が現れる．

そこで、図 2 で与えられたストークスグラフに対して、以上の原理を一気に拡張し、

与えられたストークスグラフの任意の閉ループ上で解の一価性条件が満足されるようにストークス線の有効・無効を決定する。

ということを考えてみる。ここで、ストークス線交差が発生すると、たとえ定義の上ではストークス線であっても、実際にはストークス現象を起こさない区間がストークス線の一部に出てくることがあるため、そのような部分を無効なストークス線 (線分の場合もある)、一方、従来通り、ストークス現象を起こす部分を有効なストークス線（分）と呼ぶことにする。さらに、有効・無効区間を含んだ、正しいストークス現象を表現するストークスグラフのことを**ストークス幾何**と呼ぶことにする。q_n 面上で勝手に選んだ閉ループで接続を繰り返していったとき、一価性条件が満足されていなければその接続はどこかおかしいことになるので、上記の手順が課しているものは、ストークスグラフが満たしているべき必要条件、ということになる。

以上の一般則を適用する際、最初に注目すべきことは、ストークスグラフを与えたときに既に有効・無効が確定しているストークス線（分）があることである。なぜならば、ストークスグラフを準備するにあたって、正規転回点の近傍に関しては、必ずそこから伸びる3本のストークス線は有効（ストークス現象を起こすこと）になっていなければならないし、新転回点の近傍では、それを挟んで両側に伸びる2本のストークス線上で今度はストークス現象を起こしてはならないからである。従って、ストークス幾何を決定する初期設定として、

1. 正規転回点（単純転回点）から発する3本のストークス線は、少なくともその展開点近傍ではストークス幾何に有効なストークス線である。

2. 新転回点から発する2本のストークス線は、少なくともその展開点近傍ではストークス幾何に無効なストークス線である。

という要請が課されることになる。

さて、以上の＜事前情報＞のもとで、問題は、すべての閉ループ（といっても重要なのは、交差点を囲む閉ループ）に対する一価性条件を課すことによって、いつでもストークス幾何を余すことなく、かつ一意的に決定すること可能か？ということである。もし、与えられたストークスグラフに対してストークス幾何が完全かつ一意的に確定することがわかれば、それがいま問題の中心である＜ボレル面のリーマン面＞を表現するものと考えて良いはずである。

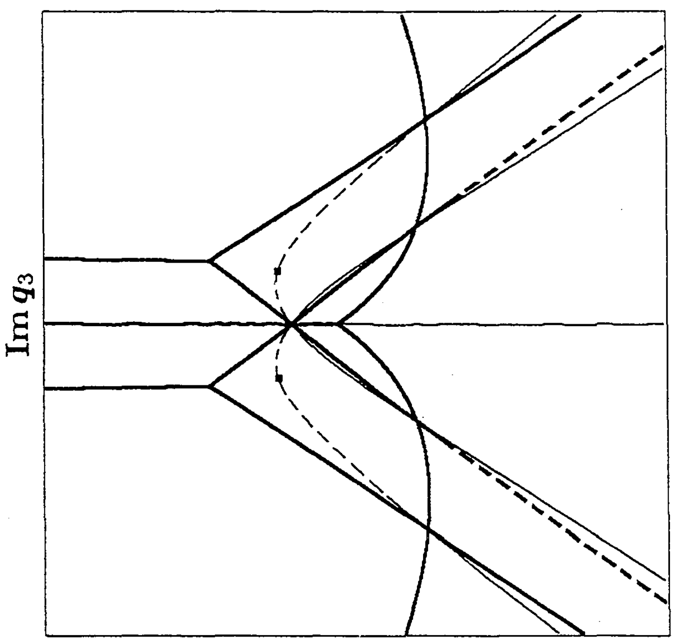

図 3 2-ステップエノン写像のストークス幾何. 実線, 点線はそれぞれ有効, 無効なストークス線を表す. 太線は正規のストークス線, 細線は新しいストークス線. 四角の点は新しい転回点. $\mathrm{Im}q_3 = 0$ の線は正規のストークス線と新しいストークス線が重なっている.

任意のストークスグラフに対してそれが可能であることを一般的に（具体的な多重積分とそのストークスグラフを与えることなく、という意味で）示すことは今のところできないが、(10)、(11) で与えられる具体的な多重積分のストークスグラフに対して、上記の手順の有効性を確かめることは可能である。実際、$n=2$ の場合、図3で示すように、上記1., 2. の初期設定からすべてのストークス線の有効・無効が完全にかつ一意的に決定することができる。図3上、点線で示した部分が、ストークスグラフとしては与えられたが、実際にはストークス幾何には寄与しない、即ち無効なストークス線 (分) である。驚くべきことに、このルールに従ってストークス線の有効・無効を逐次決めていくと、正規の転回点から伸びる3本のストークス線が交差点を通過したあとストークス幾何に対して無効なストークス線に化けてしまうことが起こる。また、$\mathrm{Im}\, q_3 = 0$ 上で4重に交差する点も、このルールに従って自然に処理することができる。

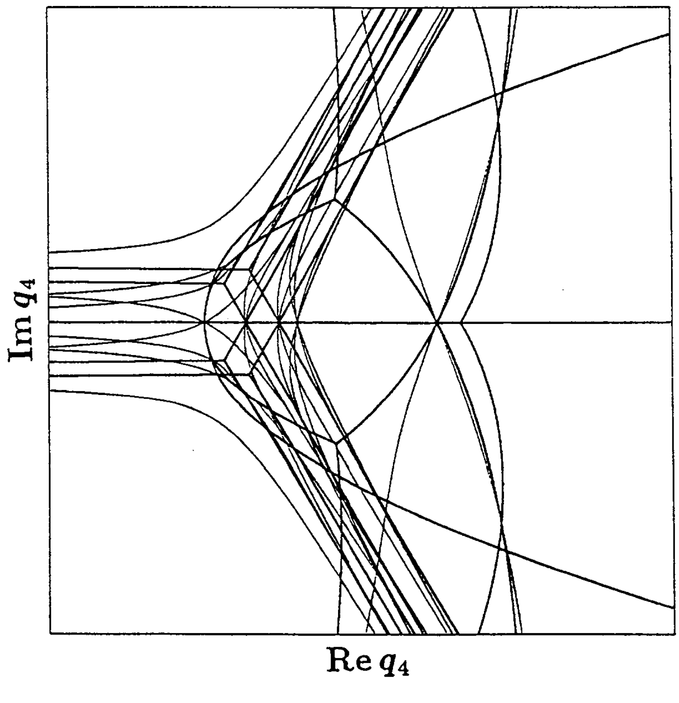

図4 3-ステップエノン写像のストークスグラフ. 太線は正規のストークス線, 細線は新しいストークス線を表す. ただし, ストークス線の有効・無効の判定前. $\mathrm{Im} q_4 = 0$ 上では正規, 新ストークス線が4重に縮退している.

さらに、$n = 3$、すなわち基本解が $2^3 = 8$ 個出てくる場合でも、全く同様にストークス幾何は上記ルールによって完全にかつ一意的に決定することができる（図4では無効なストークス線を点線で示す前のすべてのストークス線を画いたものである）。この場合、正規のストークス線は21本、新しいストークス線は42本、計63本のストークス線がストークスグラフとして現れ、その様相は図に見るとおり複雑極まりないが、上記ルールを丹念に適用していくと、あたかもジグゾーパズルを解くようにすべての有効・無効を決定することができる。

以上の [**ストークスグラフ ＋ 局所的な初期設定**] によるストークス幾何の確定 = ボレル面のリーマン面の決定、というアルゴリズムがいかなる場合でも可能か？すなわち、具体的な多重積分とそのストークスグラフに対してではなく、どのようなストークスグラフに対しても以上の手順は必ず一意的なストークス幾何を与えることが保証されているか？という疑問に対しては我々はいまのところ答えをもっていない。しかし、未知関数のリーマン面をストークスグラフを用いて解くことができる例が、実際に存在することはそれ自体かなり驚きであり、図4で示した極めて複雑なストークスグラフでさえも、ここでの方法がうまくいくことを見ると、背後に相応の必然性があるものと思いたくなる。因みに、具体的な多重積分のストークスグラフではなく、平面上に勝手に正規転回点と新転回点を配置した＜仮想ストークスグラフ＞に対して上記の手順を適用すると、必ずしもストークス幾何が一意的に決まらないような状況を作ることができる。このことから、実際の多重積分で描かれるストークスグラフは、平面上に与えられた任意のグラフではなく、しかるべき拘束のもとで現れた、制限のかかったグラフ、であることが逆にわかる。

ここで得られたストークス幾何が本当に正しいボレル面を表現していることは、以下の3つの独立な方法によって確証を得ることができる [22]:

1. 漸近領域のストークス現象
2. 勾配方程式を解くことによる多次元積分面の決定
3. 超漸近展開法を利用したリーマン面の代数的解析

詳細は論文 [22] に譲るが、Voros の接続公式の高次元への適用など厳密な基礎付けはさておき、ここで述べた＜グラフを用いたリーマン面決定の手順＞は、有限ステップのエノン写像を含む、一般の多重積分のストークス幾何決定に対する強力な処方箋になっていることが予想される。

9. 今後の課題 ―ストークス幾何と複素力学系の融合に向けて―

高次元の量子現象一般に対してより深い理解を得るためには、高次元のストークス現象の理論確立は避けて通れない。しかし、それができれば、カオス存在下でのトンネル現象＜カオス的トンネル効果＞ [17] 以外にも、多準位の非断熱遷移の問題など、高階の微分方程式が現れる未解決問題への本格的取り組みが可能になってくる。

ここではより原理的な疑問として、冒頭に触れた問題をもう一度思い出してみたい。もともと非局所的な対象である波動現象（量子論）を軌道（古典論）という局所的な記述法によって説明しようとしたとき現れる綻びは、＜ WKB 解の発散＞というかたちで現れることは既に何度も述べた。この事情は可積分でも非可積分でも変わらないはずだが、少なくとも可積分系の場合、その破れの程度は非可積分系に比べて遥かにたちの良いものであろう。破れの程度を定量的に比較する方法がなければ意味がないが、カオスであることから必然的に発生する稠密な鞍点とは状況が全く違うことは直感的には明らかである。

この点に関しては、たとえ、上に述べてきたような高次元（半古典グリーン関数では多重積分）のストークス現象を exact WKB 解析の枠組で正しく処理する一定のアルゴリズムが確立されたとしても、有限の時間で考える限りは可積分系との原理的な峻別は依然としてできないことは明らかである。カオスを規定する“時間軸”という、いまひとつの漸近極限がその中にはまだないからである。ここまでの話しに沿って形式的に言えば、無限

多重積分の漸近展開とストークス現象の問題を考えることになるが、これまた"言うは易いが行うは難し"である。

しかし、光明が全くないわけではない。それは、半古典論プロパゲータの鞍点である＜複素力学系＞に対する知識が徐々ではあるが着実に蓄えられていることである [23]。特に、(11) で考えた複素エノン写像に対しては、2次元の複素力学系としては唯一だが厳密な解析が進んでおり [24]、さらに心強いことに、その結果を用いることにより、半古典論に寄与する複素古典論の軌道が複素力学系に現れるジュリア集合とほぼ同一視してよいことがわかってきた [25]。このことから、力学系の長時間振る舞いと局所的な記述法との齟齬がいつどのように発生するか、という問題を「ジュリア集合を鞍点にもつ漸近展開の exact WKB 解析を実行する」ことで捉えることができるかもしれない。より具体的には、「**8.** で導入したストークス幾何の中に複素力学系の情報がいかに反映されるか？」ということを考えていくことになろう。

参考文献

[1] Les Houches Summer School "chaos and quantum physics", Edts., M.-J. Giannoni, A.Voros and Zinn-Justin, (North-Holland, 1991, Amsterdam).

[2] R. Aurich, M. Sieber and F. Steiner, Phys. Rev. Lett., **61**(1988)483.

[3] 数理科学, 特集『跡公式』, 1999 年 3 月号.

[4] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).

[5] H. Primack and U. Smilansky, J. Phys. A **31**(1998)6253.

[6] P. Dahlqvist, chaodyn/9812017.

[7] M.V. Berry and J.P. Keating, J. Phys. A**23**(1990)4839; P. Cvitanovic and B. Eckhardt, Phys. Rev. Lett., **63**(1989)823; B. Georgeot and R.E. Prange, Phys. Rev. Lett. **74**(1995)2851; *ibid*, **74**(1995)4110.

[8] P. Cvitanovic, P. Vattay and A. Wizrba, in *Classical and Semiclassical and Quantum Dynamics in Atoms, Lecture Notes in Physics* **485**, 29, edited by H. Friedrich and B. Eckhardt (Springer, Heidelberg, 1997).

[9] T. Harayama, A. Shudo and S. Tasaki, Nonlinearity, to appear.

[10] J. Heading, "*An Introduction to Phase-Integral Methods*" (Methuen, London, 1962).

[11] R.B. Dingle, "*Asymptotic expansions: their derivation and interpretation*"(Academic Press, London, 1973).

[12] S. Adachi, Ann. Phys. (NY) **195** (1989) 45.

[13] R. Balian, G. Parisi and A. Voros, Phys. Rev. Lett., **41**(1979)141.

[14] 河合隆裕、竹井義次,『特異摂動の代数解析』(岩波書店, 1998).

[15] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in ICM-90 Satellite Conference Proceedings, *Special Functions*, (1991)1 (Springer).

[16] B. Sternin and V. Shatalov, "*Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory*" (CRC Press, 1996); E. Delabaere and F. Pham, "*Resurgent Method in Semi-Classical Asymptotics*, preprint.

[17] A. Shudo and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett., **74**(1995)682; *ibid* **76**(1996)4151; Physica D**115**(1998)234.

[18] A. Voros, Ann. Inst. H. Poincare, A **39**(1983)211.

[19] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in *Méthodes résurgentes, Analyse algébrique des perturbations singuliéres*, L. Boutet de Monvel ed.(1994)69.

[20] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts, J. Math. Phys., **23**(1982)988.

[21] M.V. Berry and C.J. Howls, Proc. L. Soc. London, **434** (1991)657.

[22] A. Shudo and K.S. Ikeda, to be published.

[23] 上田哲夫, 谷口雅彦, 諸澤俊介 『複素力学系序説』(倍風館、1995 年); J. Smillie, in *Flavors of geometry,* **31** of Math. Sci. Res. Inst. Publ.(Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1997).

[24] E. Bedford and J. Smillie(一部 M. Lyubich と共著), "*Polynomial Diffeomorphisms of* $\boldsymbol{C}^2$ I-VII", `http://www.math.sunysb.edu/dynamics/preprints/preprints.html`; J.H. Hubberd and R.W. Oberste-Vorth, Publ. Math. IHES, **79**, (1994)5.

[25] A. Shudo, Y. Ishii, and K.S. Ikeda, in preparation.